



Sciences et technologies de l'Industrie et du développement durable

Présentation de la R.D.M.

I – Généralités

1. Présentation de la résistance des matériaux

Toute la statique est basée sur l'hypothèse fondamentale que le solide est indéformable. Or si cela est acceptable en première approximation pour des solides de géométrie « trapue », il n'en est pas de même pour ceux de forme « élancée », les **poutres**, étudiées alors en résistance des matériaux.

La résistance des matériaux, basée sur la statique, a pour but essentiel de déterminer les dimensions et déformations de toutes les pièces de type « poutre », afin qu'elles supportent les efforts auxquels elles sont soumises, dans les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.



2. Différents types de problèmes rencontrés

Calcul de résistance : Le calcul de résistance permet de déterminer toutes les dimensions d'une pièce afin de s'assurer qu'en aucun point de sa structure, les sollicitations internes (contraintes) ne dépassent pas une certaine limite. Cette limite est fonction du type de matériau utilisé et est déterminée par des essais spécifiques.

Calcul de déformation, ou de rigidité : Les déformations d'une poutre, nommées « flèches », sont étudiées en résistance des matériaux, afin de s'assurer qu'elles sont tolérables.

- # Précision de certaines cinématiques (machines outils, arbres de transmission, rigidité des bâtis) ;
- # Compatibilité des déformations avec le fonctionnement souhaité (cahier des charges) ;
- # Esthétique de certains ouvrages...

Calcul de vérification : C'est le problème le plus simple. La conception est souvent imposée par des critères de standardisation de matières premières, et il ne reste plus qu'à s'assurer que les éléments donneront satisfaction en **résistance** et **rigidité**.

Choix des matériaux : Il arrive que les dimensions d'une pièce soient imposées par des critères d'encombrement, de poids ou d'esthétique, et qu'elle soit soumise à un chargement bien défini. La résistance des matériaux permet de choisir la qualité du matériau au meilleur coût, et aussi de définir certains traitements thermiques en vue d'améliorer les caractéristiques si nécessaire.

II – Hypothèses et principaux essais

1. Hypothèses générales de la résistance des matériaux

Géométrie de la poutre

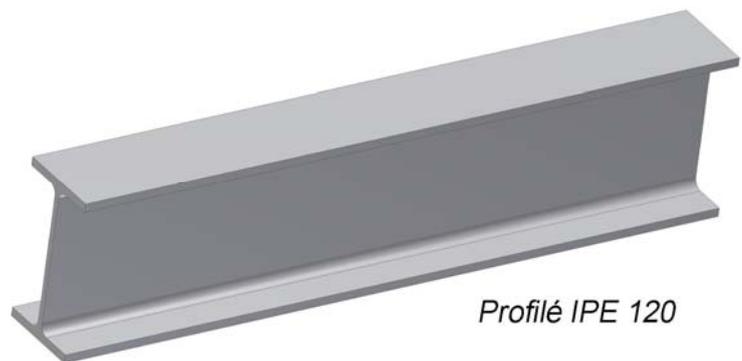
Le centre de gravité de chaque section de la poutre décrit une ligne continue, la **ligne moyenne**, généralement plane. La ligne moyenne doit être **rectiligne** ou à **grand rayon de courbure** : supérieur à cinq fois la dimension transversale, prise dans le sens du rayon de courbure.

La longueur de la poutre est importante par rapport aux deux autres dimensions transversales.

Les sections droites (orthogonales aux tangentes à la ligne moyenne, aux centres de gravité respectifs) sont progressivement variables ; pas de forts gradients de variation de section (épaulements, rainures....).

Exemples :

Ressort



Profilé IPE 120



Barre de torsion
(distributeur hydraulique)

Hypothèses sur le matériau

Matériaux **homogènes** (identiques en tout point) et **isotropes** (même comportement mécanique dans toutes les directions).

Principe de Navier et Bernoulli : Les sections planes et normales à la ligne moyenne (sections droites) avant déformation, restent planes après déformation.

Les déformations restent faibles, et ne modifient donc en rien les points d'application et les directions des charges appliquées.

Principe de Saint Venant : Loin des points d'application des charges concentrées, les conséquences de ces charges ne dépendent pas de la manière dont ces charges sont appliquées.

2. Les essais en résistance des matériaux

Les essais, ou expériences, permettent de constater certains phénomènes et à partir de leur analyse de mettre en place une théorie. Le développement de cette théorie, la résistance des matériaux, peut être très mathématique, mais ses résultats sont encore vérifiés par de nouveaux essais. Les essais sont très nombreux, ne portent en général que sur un paramètre, et se font avec une extrême précision.

Domaine de validité

Les solides qui nécessitent des calculs de résistance et qui répondent parfaitement à la définition d'une poutre sont rares. Les essais permettent donc aussi de s'assurer de la validité de certaines approximations qui sont ainsi faites. Celles-ci sont corrigées avec des **coefficients de sécurité** parfois elles sont tout simplement remises en cause.

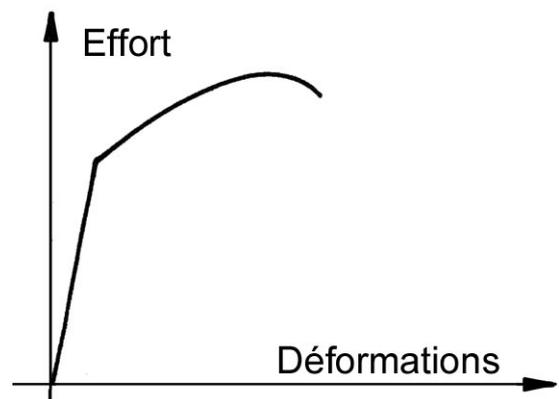
3. Etude expérimentale des déformations

Tous ces essais sont basés sur le même principe : soumettre une éprouvette, de dimensions normalisées, à un chargement progressif, et analyser son comportement jusqu'à la rupture. Ce sont les essais de **TRACTION** (**COMPRESSION**), c'est le plus important, **CISAILLEMENT**, **TORSION** et **FLEXION**.

Tous ces essais font apparaître deux phases :

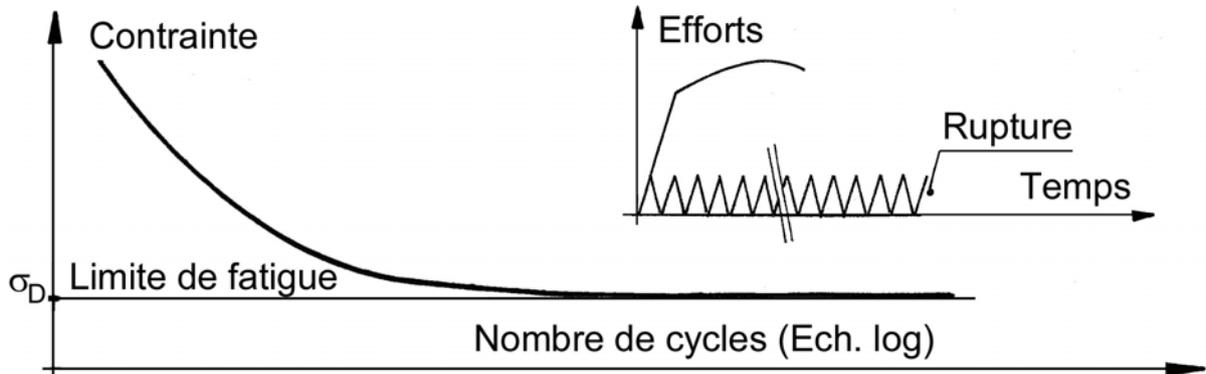
Une phase de déformation élastique dans laquelle les déformations sont proportionnelles aux efforts, et qui est à l'origine de la loi de Hooke.

Une phase de déformation plastique, ou permanente.



4. Essai de fatigue ou d'endurance

Il consiste à soumettre une éprouvette à des sollicitations alternées sans jamais atteindre la limite élastique : traction-compression alternées, torsion alternative, flexion alternative, ... L'éprouvette finit par se rompre au bout d'un nombre de cycles plus ou moins grand. Les résultats sont donnés sur les courbes de Wöhler :



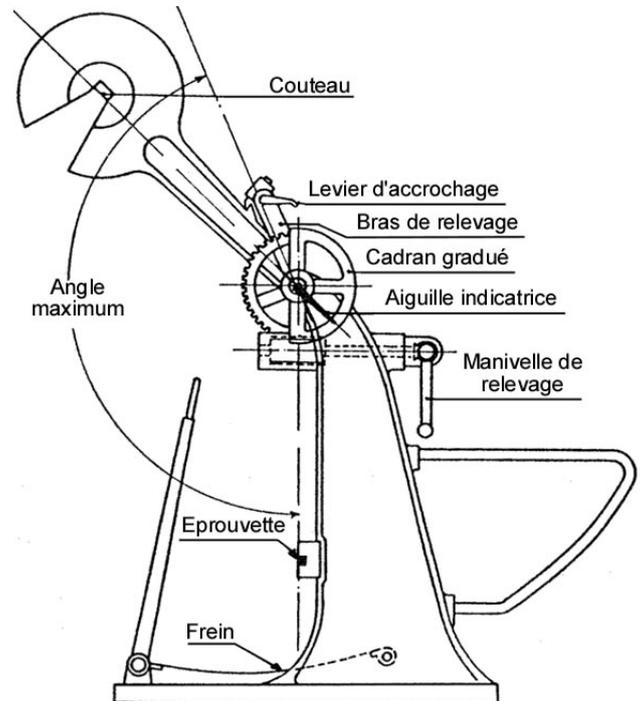
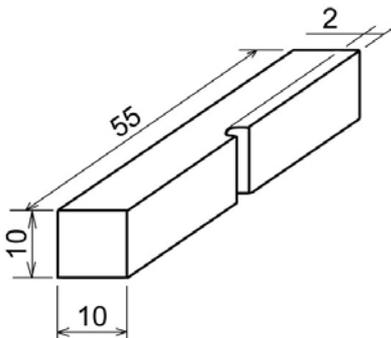
La limite de fatigue σ_D est la valeur de la contrainte maximale (ou effort maximal ramené à l'unité de section) qui, appliquée périodiquement à une éprouvette, n'entraîne sa rupture que pour un nombre infiniment grand d'alternances (supérieure à $10^6 - 10^8$ cycles).

5. Essai de résilience

Le but de l'essai est de connaître la **résilience**, ou la résistance aux chocs, d'un matériau. L'essai consiste à rompre par un seul choc, une éprouvette préalablement entaillée en son milieu, suivant des dimensions normalisées, et à mesurer l'énergie W absorbée par la rupture. La résilience est définie par le rapport :

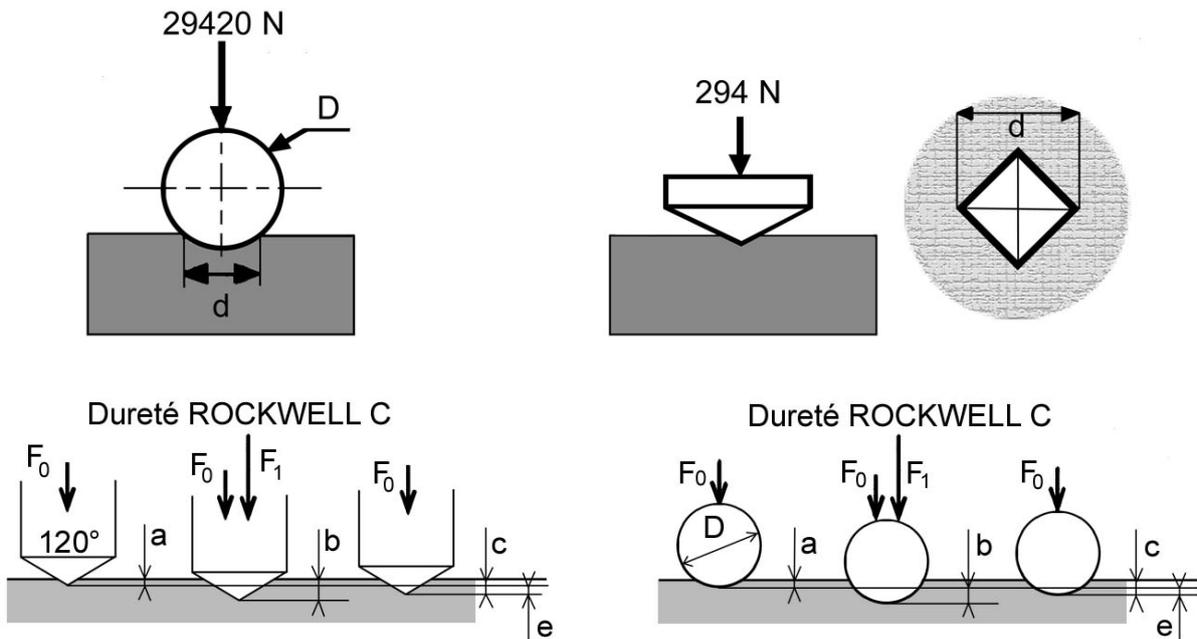
$$K = \frac{W}{S} \quad \text{en J.cm}^{-2}$$

Essai réalisé sur le mouton pendulaire de Charpy.



6. Essais de dureté : Les essais de dureté consistent à appliquer, avec une force parfaitement déterminée, un pénétrateur sur la surface de la pièce à tester. Les indices de dureté (H , *hard*) sont déduits de la profondeur ou de l'aire de l'empreinte laissée par le pénétrateur. La gamme de dureté des différents matériaux étant très étendue, il est nécessaire d'utiliser différents types de pénétrateurs combinés à deux types opératoires.

Essais de dureté Brinell et Vickers (indices HB et H_V) : Le pénétrateur, une bille de diamètre D pour Brinell, ou une pointe pyramidale pour Vickers, est appliqué avec une force normalisée sur la surface à tester puis retiré.



III – Vocabulaire

Elasticité : Caractéristique d'un matériau à se déformer sous un effort progressif, puis à revenir à sa géométrie initiale après suppression de l'effort. L'élasticité est limitée par une caractéristique essentielle : La limite élastique : **Re**.

*Dans la phase de déformation élastique, les déformations sont proportionnelles aux efforts. Le coefficient de proportionnalité dépend du matériau : **loi de Hooke**.*

Plasticité : Caractéristique d'un matériau à se déformer entre sa limite élastique **Re** et sa limite à la rupture **Rr**, et à conserver cette déformation après suppression de l'effort. La plasticité est complétée par deux propriétés :

- **Malléabilité** : capacité d'un corps à être mis sous forme de feuille (tôle).
- **Ductilité** : capacité d'un corps à être mis sous forme de fils (tôle).

Ecrouissage : Opération consistant à travailler (en le frappant, laminant, étirant) un métal à une température inférieure à sa température de recuit. C'est un phénomène dû à une déformation plastique : globale ou locale. L'écrouissage modifie certaines caractéristiques mécaniques (Résistance et dureté accrues, résilience et malléabilité diminuée).

Résilience & fragilité : Caractéristiques opposées.

- La résilience est la capacité d'un matériau à résister aux chocs, ou à absorber l'énergie de déformation.
- La fragilité est la caractéristique d'un matériau à se casser sans déformation plastique préalable.

Ténacité : Capacité à absorber l'énergie de déformation, à résister à la propagation de fissures. Elle est quantifiée par la mesure de Résilience, à l'aide du mouton pendule de Charpy.

Fluage : Déformation plastique très lente sous un effort constant, même modéré.

Matage : Déformation locale, par tassement de la matière, due à une pression de contact trop importante. Le matage crée un écrouissage local. Le matage est exploité comme traitement mécanique des aciers : le galetage

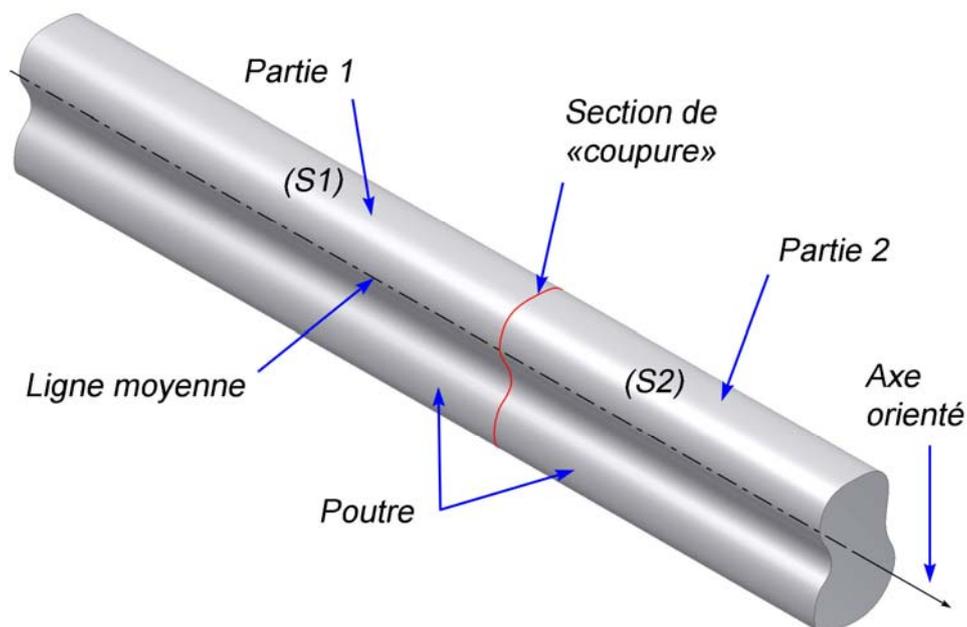
IV – Cohésion de la matière - Tenseur de cohésion

1. Efforts intérieurs - Efforts extérieurs, tenseur de cohésion

Lorsqu'un solide est sollicité par des actions mécaniques extérieures, il y a création d'**actions mécaniques de cohésion** (ou **efforts intérieurs**) au sein de la matière (interactions au niveau des atomes qui constitue la matière). Ce sont ces actions qui vont conduire à la déformation du solide, voire à sa rupture.

Dans le cas de la résistance des matériaux, on va chercher à mettre en relation les actions extérieures appliquée à la poutre et les actions de cohésion. A partir du tenseur de cohésion, on pourra étudier les **contraintes** en tout point de la matière, puis par les lois de la Rdm, parvenir aux déformations. L'étude porte sur les sections droites de la poutre.

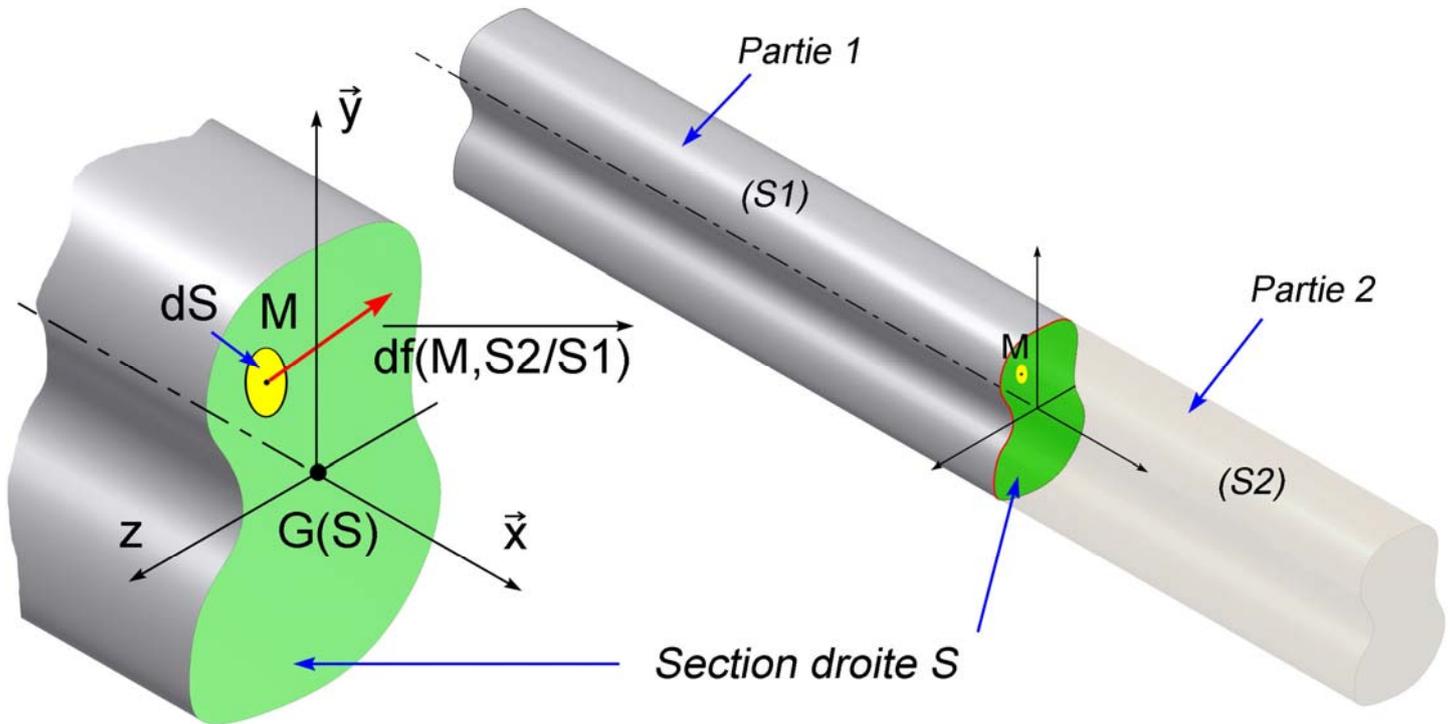
Soit une poutre (S). Sa ligne moyenne, orientée, est le lieu des centres de gravité de chaque section droite. Sur la figure ci-dessous, la ligne moyenne est rectiligne, confondue avec l'axe orienté. En une section courante (quelconque) on pratique une coupure fictive, suivant une section droite, mettant ainsi en évidence deux parties, (S1) et (S2).



Définition : torseur de cohésion

Le torseur de cohésion exprimé en G , centre de gravité de la section courante, est le torseur des actions exercées la partie $S2$ sur la partie $S1$.

$$\{T_{\text{coh}}\}_G = \{T_{S2/S1}\}_G$$



Effort élémentaire en M : en chaque point M de la section droite S , l'action mécanique exercée par $S2$ sur $S1$ est une force élémentaire, $\overline{df(M, S2/S1)}$.

Action globale, en $G(S)$: l'action mécanique globale en $G(S)$, centre de gravité de la section droite S , exercée par $S2$ sur $S1$ est alors une résultante et un moment.

- ◆ Résultante des actions de $S2/S1$: $\overline{R(S2/S1)} = \iint_{(S)} \overline{df(M, S2/S1)}$;
- ◆ Moment en $G(S)$ des actions de $S2/S1$: $\overline{M_{G(S)}(S2/S1)} = \iint_{(S)} \overline{G(S)M} \wedge \overline{df(M, S2/S1)}$

Ces deux vecteurs, exprimés dans le repère local de la section (normale à la section, et axes du plan), fournissent les éléments du torseur de cohésion. Ainsi sur la figure précédente, le repère local est $(G(S), x, y, z)$ et on peut trouver :

$$\{T_{S2/S1}\}_{G(S)} = \left\{ \begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{(G(S), R)}$$

Résultante :

N, effort normal : composante suivant ξ ;

Ty, Tz, efforts tranchants, composantes respectives sur ψ et ζ ;

Moment :

Mt, moment de torsion : composante suivant ξ ;

Mfy Mfz, moments fléchissants, composantes respectives sur ψ et ζ .

2. Torseur de cohésion & sollicitations

Composantes du torseur de cohésion	Sollicitations
N	Traction ou compression
Ty, ou Tz	Cisaillement
Mt	Torsion
Mfy ou Mfz	Flexion pure
[Tz, Mfy] ou [Ty, Mfz]	Flexion simple

3. Détermination du torseur de cohésion

En isolant respectivement S2 ou S1, on peut établir deux théorèmes de détermination, mettant en relation les actions extérieures et les actions de cohésion :

$$\{\mathbf{T}_{\text{coh}}\}_G = \{\mathbf{T}_{\text{ext/S2}}\}_G = - \{\mathbf{T}_{\text{ext/S1}}\}_G$$

L'utilisation de l'un ou de l'autre dépend du cas étudié, de la connaissance ou non du chargement sur une partie de la poutre.

Il convient alors d'exprimer les torseur de cohésion pour chaque section courante, notamment dans les différentes zones de la poutre, où le chargement évolue.

Exemple : on considère la poutre 1 [OB] maintenue en équilibre par un support [CA].

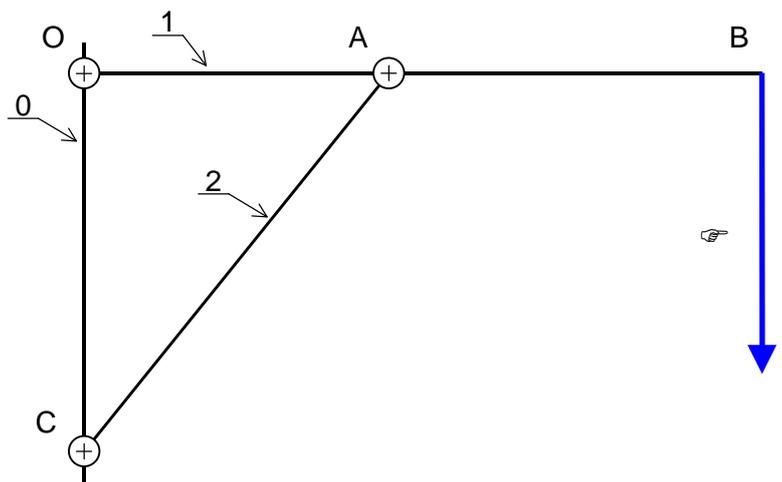
OA = a = 400mm ;

AB = b = 500mm ;

OC = c = 500mm ;

F = 400N

On néglige le poids des pièces devant l'effort F. L'étude de l'équilibre des deux solides 1 et 2, conduit aux efforts définis ci-dessous.



- ◆ **Poutre 2** : en équilibre sous l'action de deux glisseurs, $\overline{C(0/2)}$ et $\overline{A(1/2)}$ de même norme, de support [AC], et de sens opposés. *Voir actions mécaniques, liaison pivot en statique plane.*
- ◆ **Poutre 1** : en équilibre sous l'action de trois glisseurs, la résolution donne :

Au point O	Au point A	Au point B
$X_O = - 720 \text{ N}$ $Y_O = - 500 \text{ N}$	$X_A = 720 \text{ N}$ $Y_A = 900 \text{ N}$	$F = - 400 \text{ N}$

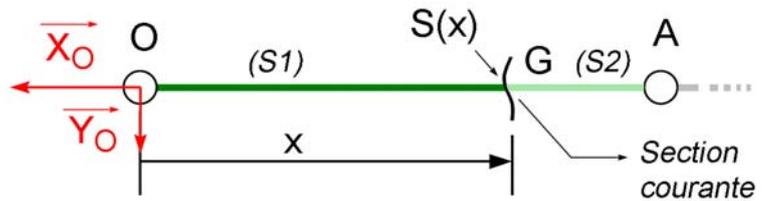
Torseur de cohésion le long de la poutre 1 : il faut distinguer deux zones, [OA] et [AB].

- ◆ Tronçon [OA] :

$$\{T_{\text{coh}}\}_G = - \{T_{\text{ext}/S1}\}_G$$

$$\{T_{\text{ext}/S1}\}_G = \begin{Bmatrix} - 720 \bar{x} - 500 \bar{y} \\ 500 x \bar{z} \end{Bmatrix}_G$$

$$\{T_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} + 720 \bar{x} + 500 \bar{y} \\ - 500 x \bar{z} \end{Bmatrix}_G$$



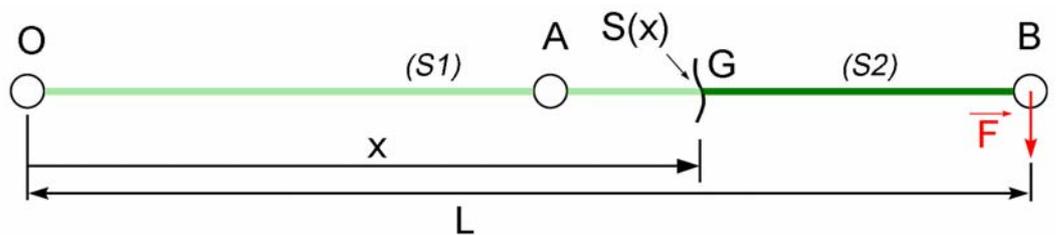
$$N = + 720 \text{ (N)} ;$$

$$T_y = + 500 \text{ (N)} ;$$

$$M_{fz} = - 500 x \text{ (N.m)}$$

Les sollicitations dans cette partie de la poutre sont :

- ◆ Traction ;
- ◆ Flexion simple.
- ◆ Tronçon [AB] :



$$\{T_{\text{coh}}\}_G = + \{T_{\text{ext}/S2}\}_G$$

$$\{T_{\text{ext}/S2}\}_G = \begin{Bmatrix} - 400 \bar{y} \\ - 400 (L - x) \bar{z} \end{Bmatrix}_G$$

$$\{T_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} - 400 \bar{y} \\ - 400 (L - x) \bar{z} \end{Bmatrix}_G$$

$$N = 0 \text{ (N)} ;$$

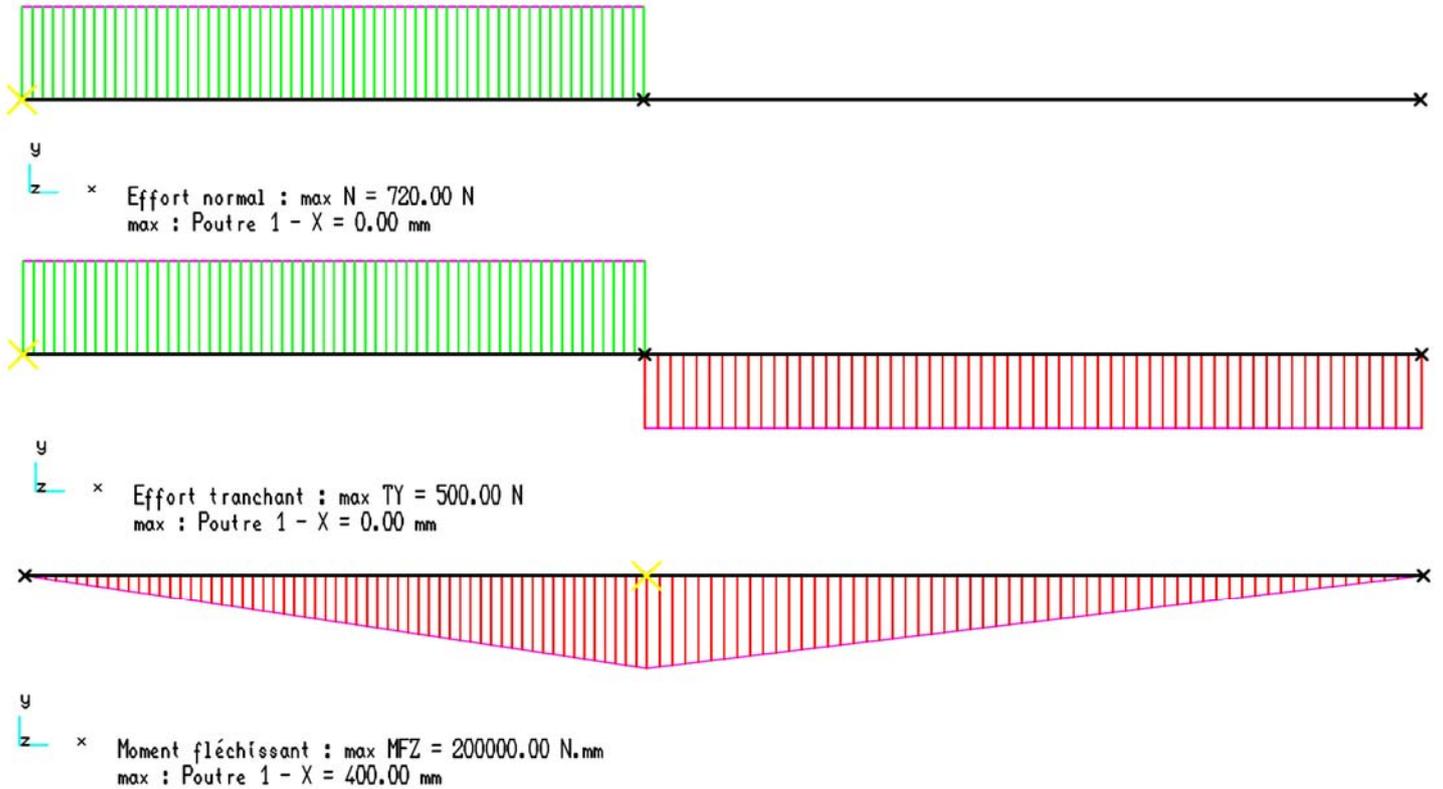
$$T_y = - 400 \text{ (N)} ;$$

$$M_{fz} = - 360 + 400 x \text{ (N.m)}$$

Les sollicitations dans cette partie de la poutre sont :

- ◆ Flexion simple.

Diagrammes des efforts de cohésion :



On constate que la section la plus sollicitée est la section en A. Le comportement de la poutre, passe par la connaissance de la contrainte. C'est l'objet du paragraphe suivant.

V – Contrainte en un point

1. Définition de la contrainte en un point

L'étude porte sur la contrainte en un point M, dans une section droite, pour la direction normale à cette surface. En fin de paragraphe, une illustration de la contrainte suivant une direction quelconque sera faite, afin de mieux comprendre les résultats fournis par les logiciels de calculs par éléments finis.

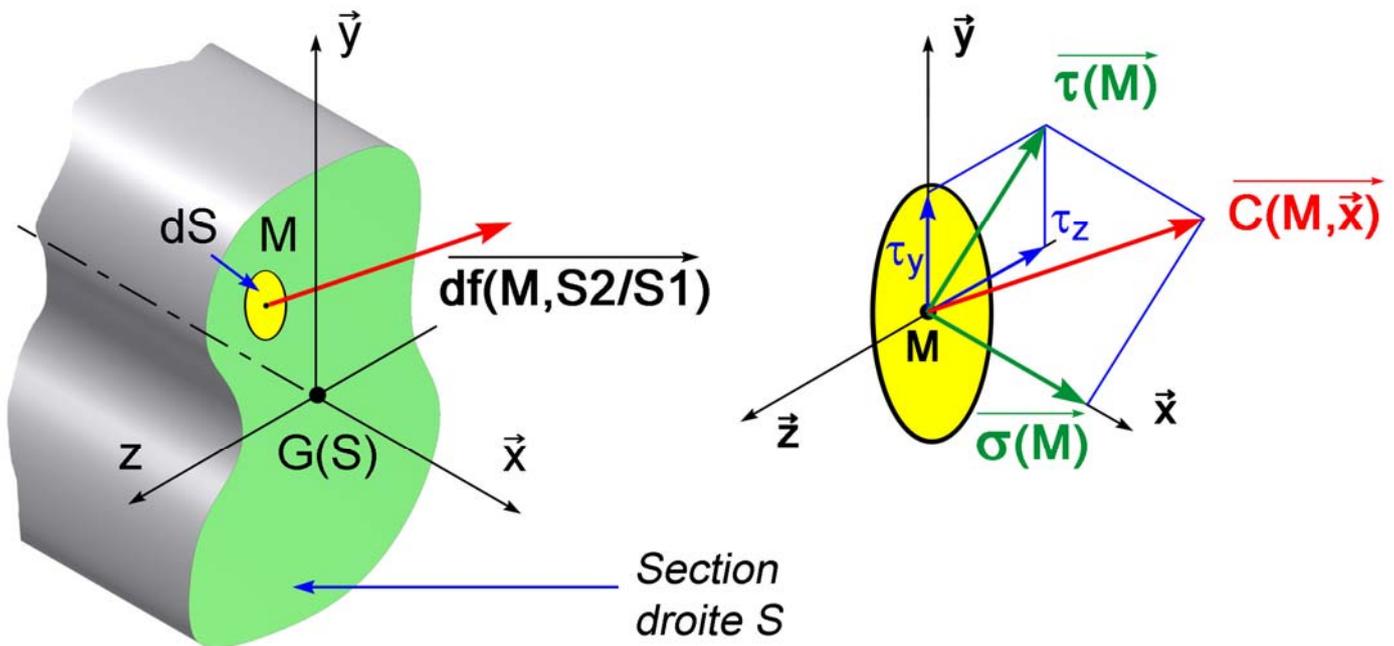
Définition : vecteur contrainte X(M, v)

La contrainte au point M, suivant la direction ξ , est définie par : $\vec{C}(M, \vec{x}) = \frac{df(M, S2/S1)}{dS}$. Elle est homogène à une pression et s'exprime en Pascal, ou plus généralement en MPa.

Dans le repère local, elle se décompose en deux composantes :

Contrainte normale, $\overrightarrow{\sigma(M)} = \sigma(M) \vec{x}$;

Contrainte tangentielle, $\overrightarrow{\tau(M)} = \tau_y \vec{y} + \tau_z \vec{z}$



2. Relation Contrainte - Tenseur de cohésion

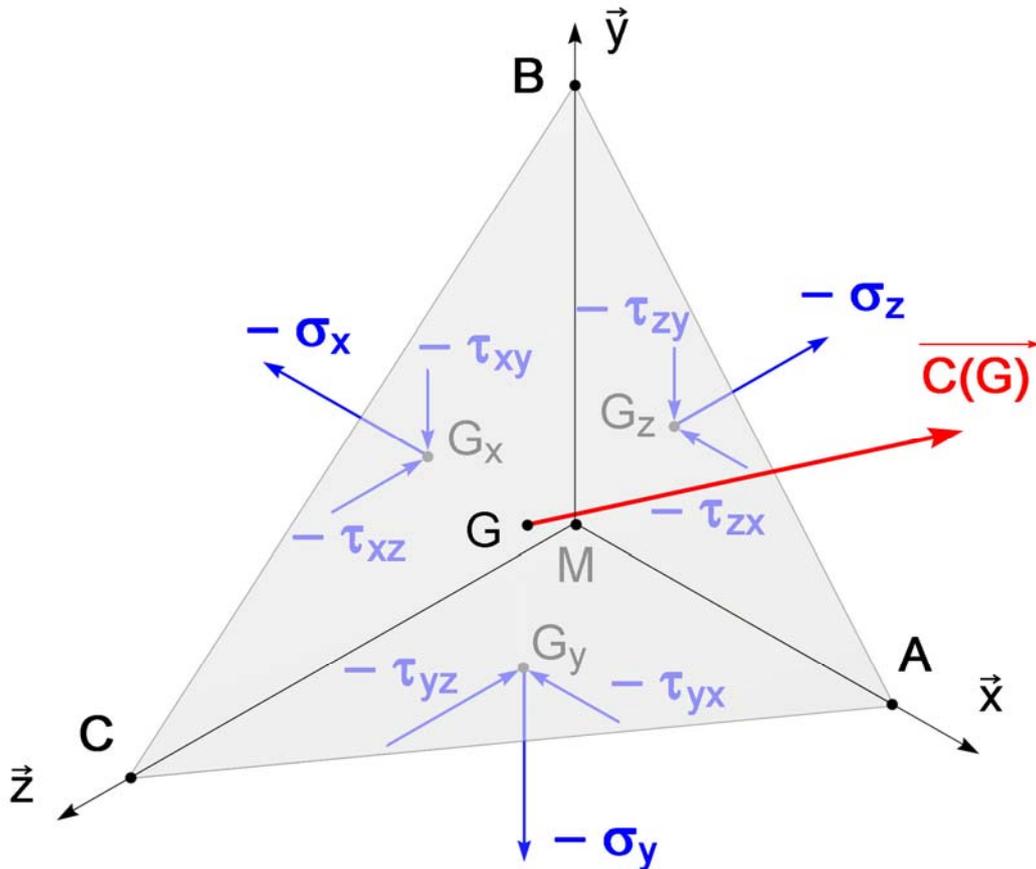
L'expression de la force élémentaire en M est : $\overrightarrow{df(M, S2/S1)} = \overrightarrow{C(M, \vec{x})} dS$

Et ainsi :

$$\{T_{S2/S1}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(S2/S1)} = \iint_{(S)} \overrightarrow{C(M, \vec{x})} dS \\ \overrightarrow{M_{G(S)}(S2/S1)} = \iint_{(S)} \overrightarrow{G(S)M} \wedge \overrightarrow{C(M, \vec{x})} dS \end{array} \right\}_G$$

3. Complément : tenseur des contraintes

Pour chaque facette d'orientation variable (normale ν), on peut définir un vecteur contrainte, $\overrightarrow{C(M, \vec{n})}$. En considérant le tétraèdre représenté ci-dessous, on peut établir la relation qui définit l'expression de ce vecteur, dans un repère donné.



En traduisant l'équilibre du tétraèdre, on obtient la relation :

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma(M)}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Avec \vec{n} , vecteur normal à la facette observée (ABC sur la figure), et n_x , n_y , n_z et les composantes de \vec{n} dans la base (ξ, ψ, ζ) . $\overline{\overline{\sigma(M)}}$ est le tenseur des contraintes, matrice symétrique, diagonalisable. Les valeurs propres de la matrice sont alors les contraintes principales, et les axes du repère dans lequel la matrice est diagonale, sont les axes principaux.

Lors des applications réalisées sur Inventor, on pourra identifier certaines composantes de la contrainte. Mais l'étude complète des contraintes nécessiterait une analyse détaillée, complexe, et il convient d'être prudent.

VI – Sollicitations simples

1. Traction - Compression

◆ Définition - torseur de cohésion

Une poutre subie une sollicitation de traction ou compression si dans le torseur de cohésion, seul l'effort normal N est non nul.

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N = F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G,R)}$$



Traction



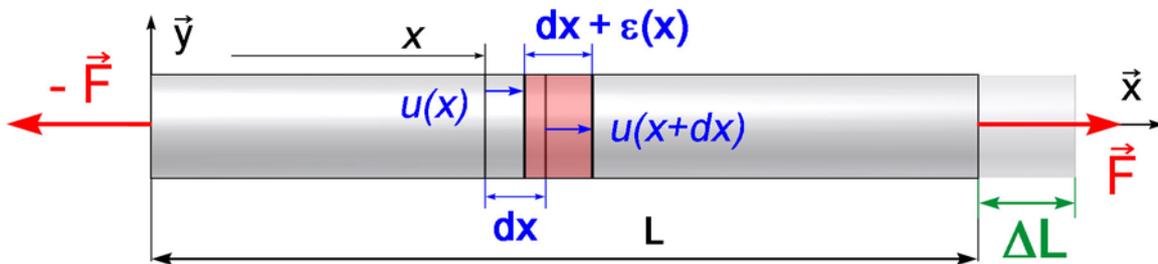
Compression

Remarque : en compression, si on veut éviter le flambage, il faut que la poutre soit de longueur inférieure à 5 à 8 fois la dimension transversale la plus petite.

◆ Déformation longitudinal unitaire - Allongement

L'observation montre que la déformation principale est l'allongement de la ligne moyenne de la poutre. Dans le cas de la poutre rectiligne, il s'agit d'un allongement suivant un axe, ici ξ .

Soit un tronçon de longueur dx , situé l'abscisse x . Lors de la traction, le tronçon s'allonge d'une longueur $\varepsilon(x)$ et se déplace. On suppose l'abscisse $x = 0$ fixe.



$\varepsilon(x)$ déformation unitaire, il dépend de la contrainte et du matériau :

$$\varepsilon(x) = \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx}$$

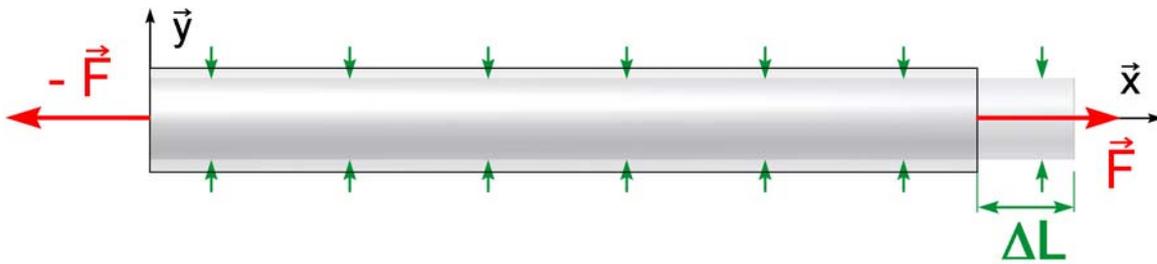
$\overline{u(x)}$ vecteur déplacement de la section $S(x)$: $u(x) = \int_0^x \varepsilon(\lambda) d\lambda$

ΔL , allongement total, correspond au déplacement de la section d'abscisse L :

$$\Delta L = u(L) = \int_0^L \varepsilon(\lambda) d\lambda \quad \text{et si } \varepsilon(x) = C^{ste}, \quad \underline{\Delta L = L \varepsilon}$$

◆ Déformations transversales - Coefficient de Poisson¹

L'observation montre également que la poutre subit des déformations transversales, moindres, mais visibles. Ces déformations sont proportionnelles à la déformation longitudinale, le coefficient de proportionnalité est le **coefficient de Poisson**.



$$|\varepsilon_y(x)| = \nu |\varepsilon(x)| \quad \text{et} \quad |\varepsilon_z(x)| = \nu |\varepsilon(x)|$$

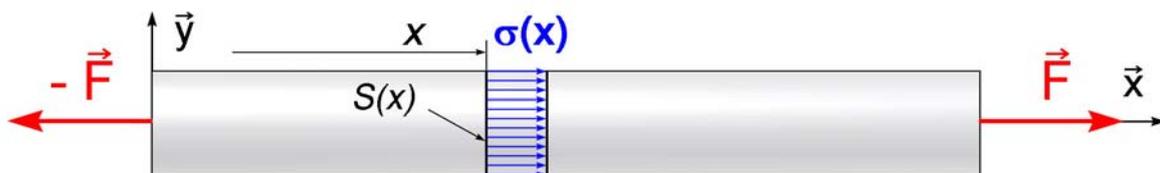
ν est le coefficient de Poisson, $0,1 < \nu < 0,5$.

Pour les aciers, la valeur usuelle est $\nu = 0,3$.

◆ Contrainte normale - Loi de comportement : loi de Hooke²

- **Contrainte** : Le principe de Navier-Bernoulli, qui stipule que les sections planes avant déformation le restent après déformation, est facilement vérifié expérimentalement. Il permet de dire que la déformation d'un tronçon est uniforme, soit que les forces élémentaires de cohésion, et donc les contraintes dans une section, sont uniformes également. Les forces élémentaires sont normales à la surface :

$$\overrightarrow{C(M, \vec{x})} = \sigma(x) \vec{x} = \frac{F}{S} \vec{x}$$



- **Loi de Hooke** : la contrainte en un point est proportionnelle à la déformation unitaire, c'est la phase de déformation élastique, visible sur le diagramme "Effort - Déformation" lors de l'essai de traction (voir §II - 3.).

$$\sigma(x) = E \times \varepsilon(x)$$

Remarque : si la déformation unitaire $\varepsilon(x)$ est constante le long de la poutre, la contrainte sera aussi constante pour toutes les sections de la poutre.

¹ **POISSON Siméon Denis** (1781-1840), Mathématicien français, intégrales définies, la théorie électromagnétique et le calcul des probabilités. Les travaux les plus importants de Poisson portent sur les applications des mathématiques à la physique et à la mécanique (Traité de mécanique 1811-1833).

² **Robert Hooke** (1635- 1703), Astronome et mathématicien anglais.

La loi de Hooke est une loi de comportement des solides soumis à une déformation élastique de faible amplitude. Elle a été énoncée en 1678 par Robert Hooke, par la phrase en latin : « ut tensio sic vis » (ou son anagramme ceiiinossttuv) ; ce qui signifie « telle extension, telle force », ou bien en termes modernes « l'allongement est proportionnel à la force ».

- Valeurs et unités :

Contrainte : homogène à une pression (Pascal) exprimée en **Mpa**.

E, module de Young³ : homogène à une pression (Pascal) exprimée en **Mpa**.

Matériau	Module de Young (Mpa)
Aciers	190000 < E < 220000
Fontes	60000 < E < 180000
Alliages de cuivre	E ≈ 120000
Alliages d'aluminium	E ≈ 70000

Remarque : Pour les matériaux homogènes et isotropes, la détermination est simple à partir des essais de traction. Le problème est différent pour les matériaux qui n'ont pas de constance dans leurs propriétés mécaniques.

Pour le bois par exemple, une méthode récente permet par une **analyse harmonique** (essai non destructif) d'accéder à la valeur du module de Young, poutre par poutre, et ainsi de classer les poutres en fonction de cette caractéristique essentielle.

- ◆ **Condition de résistance**

Afin de toujours rester dans le domaine élastique, il convient que la contrainte maximale au sein d'un solide, reste inférieure à une valeur limite, la "**résistance pratique à l'extension**" **Rpe**.

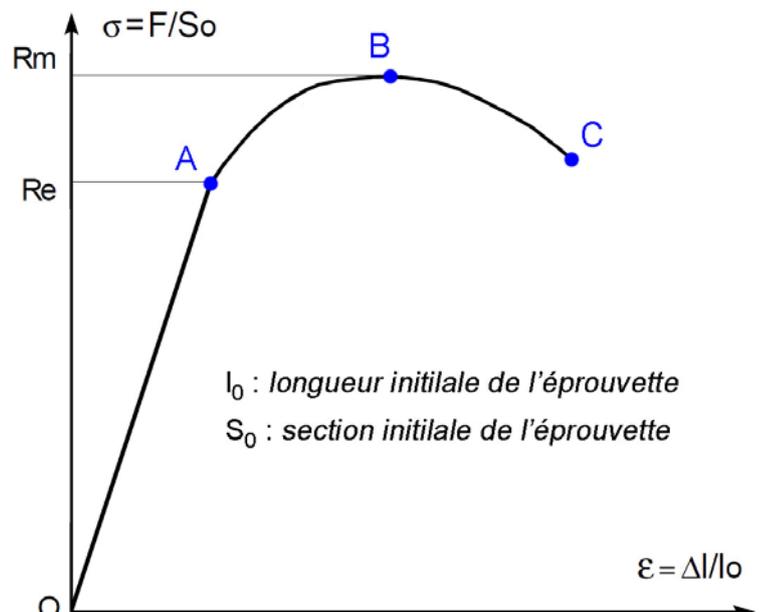
Cette valeur est déduite de la limite élastique du matériau, la "**résistance élastique à l'elongation**" **Re**, avec intervention d'un coefficient de sécurité

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

s : coefficient de sécurité (matériau, charge...)

$$\sigma_{Max} = \frac{N}{S} < \frac{R_e}{s} = R_{pe}$$

Valeur valable pour un solide "poutre" à moduler, lorsque le solide possède des "accidents" (perçage, rainure, etc...). Voir **concentration de contrainte**.



³ Physicien britannique Thomas Young (1773-1829)

- Quelques exemples de valeurs :

Matériaux	Re (MPa)	Rm (Mpa)
Acier de construction : S275	275	450
Acier de construction mécanique : E360	360	730
Acier non allié, 0,35% de carbone : C35	490	630
Acier faiblement allié : 46SiCrMo6	870	1050
Acier fortement allié: X10CrNi18-8	320	740
Alliage d'aluminium	100/500	200/600
Composite Carbone/Epoxy	—	1400
Teflon (PTFE)	20/40	—
PVC rigide	55	—
Bois (selon essence)		90 à 150

- ◆ **Concentration de contrainte**

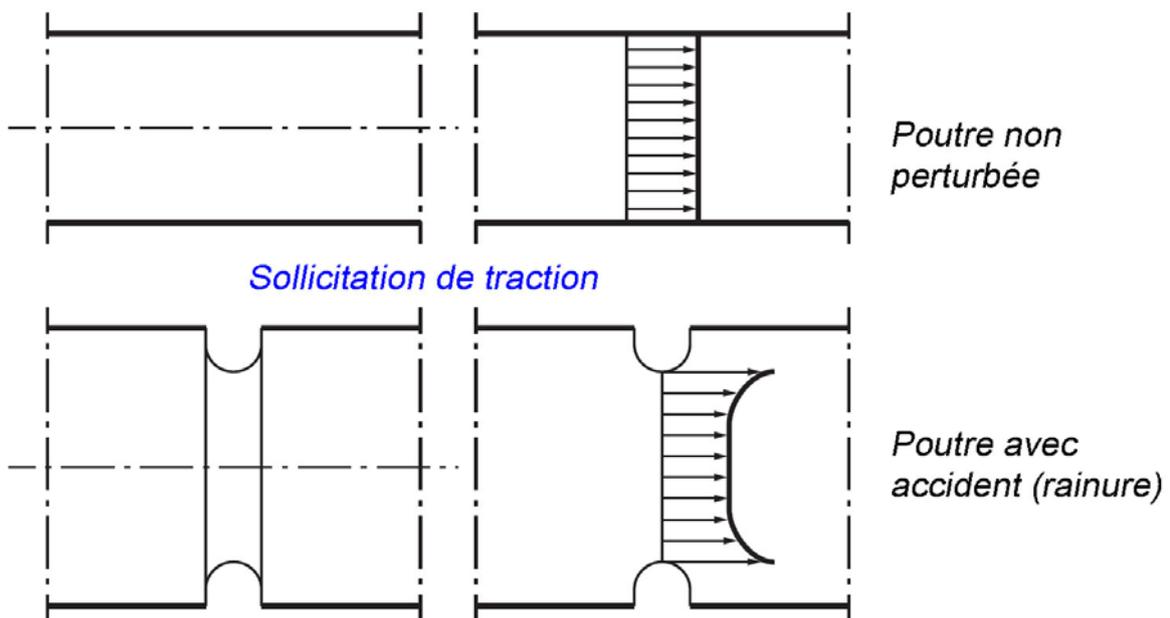
Les concentrations de contraintes sont dues à des variations brutales de section, des angles vifs, causés inévitablement dans les pièces usuelles, par des épaulements, des rainures de circlips, des filetages... Dans ces zones, on observe une augmentation sensible des valeurs de la contrainte, augmentation qu'il faut évidemment prendre en compte dans la condition de résistance. La répartition des contraintes n'est plus uniforme, les contraintes maximales sont concentrées près des accidents de forme.

$$\sigma_{\text{Max}} = K_t \times \sigma_0 \quad \text{où } \sigma_0 \text{ est la contrainte définie par } \sigma_0 = \frac{N}{S}$$

S : section réduite au niveau de l'accident ;

K_t : coefficient de concentration de contrainte.

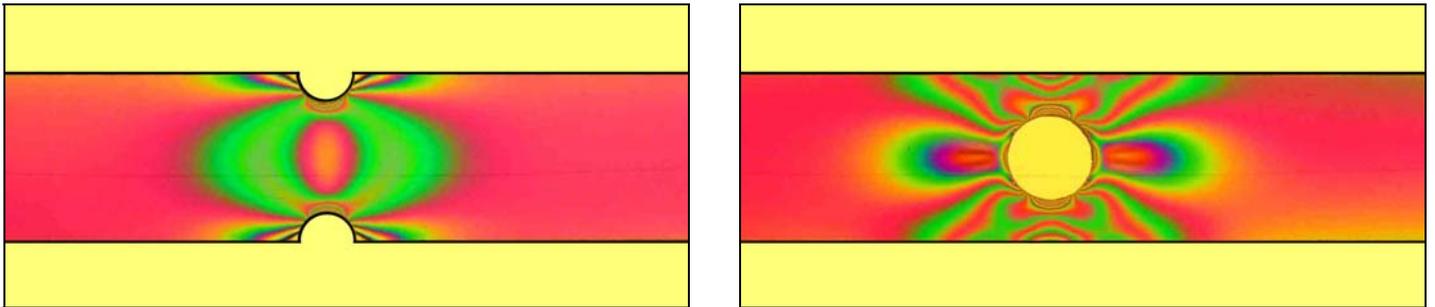
- Exemple de concentration de contrainte



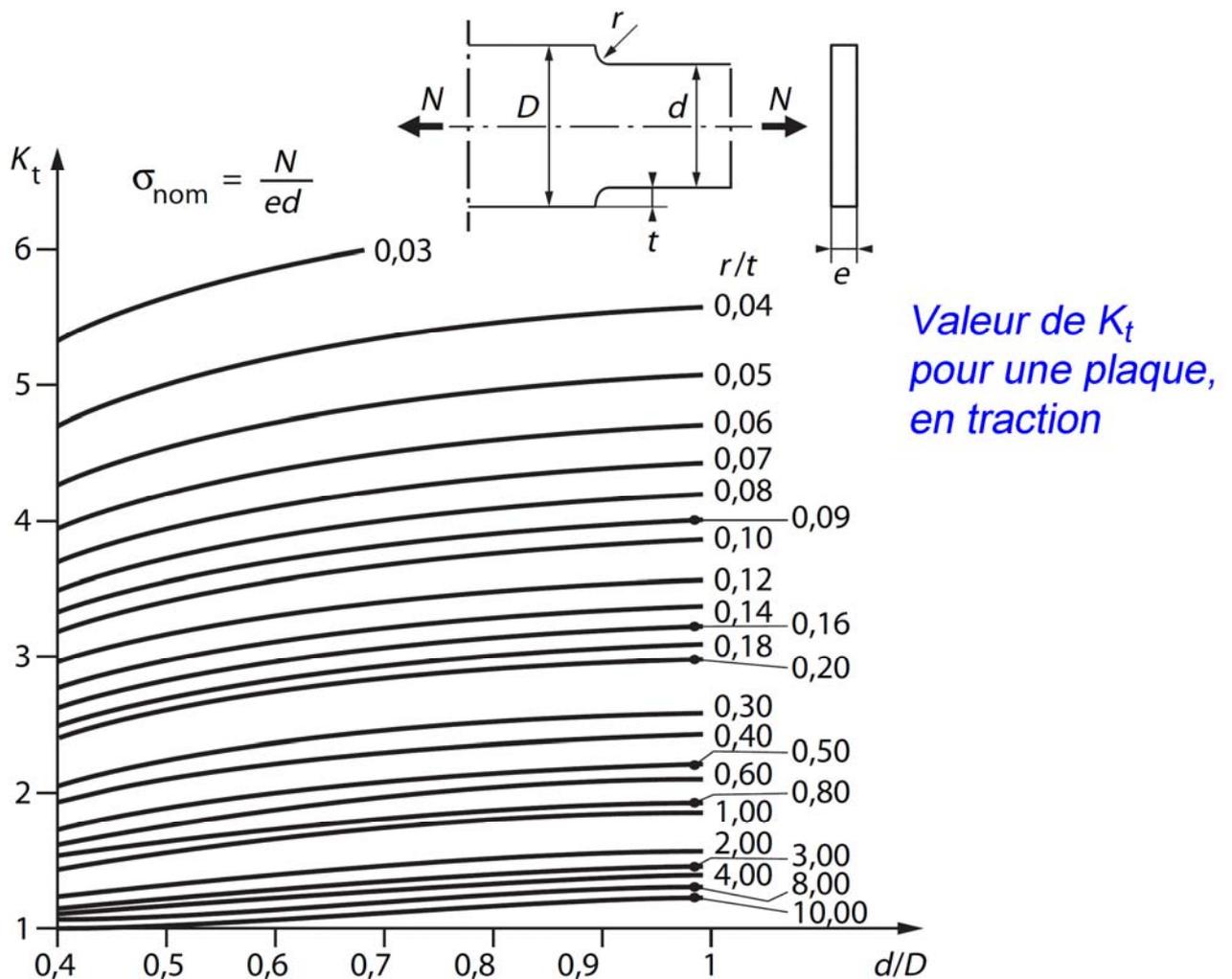
- Photoélasticité, photoélasticimétrie

La photoélasticité est la propriété, découverte en 1816 par Brewster, qu'ont certaines substances transparentes isotropes de devenir biréfringentes sous l'influence de déformations élastiques. Cette propriété est exploitée dans la photoélasticimétrie : méthode optique qui permet d'analyser la répartition et la valeur des contraintes ou des déformations subies par un solide soumis à des actions données.

Ci dessus la visualisation des contraintes dans deux "poutres" en polycarbonate, perturbées par des accidents. On voit nettement que la contrainte est constante là où le profil est régulier, et que sa répartition n'est plus uniforme au voisinage des accidents.



Expérimentalement des abaques ont été établis, afin de définir le coefficient de concentration de contrainte k à prendre en compte. Des formules existent, et les logiciels permettent d'intégrer ces éléments.



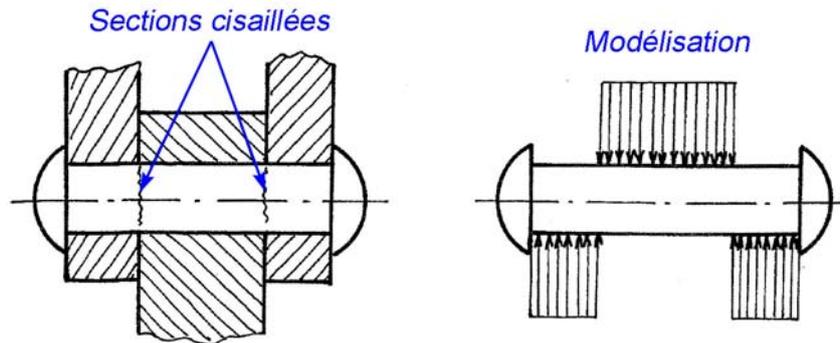
2. Cisaillement

◆ Définition - torseur de cohésion

Une poutre subie une sollicitation de cisaillement si dans le torseur de cohésion, seul les efforts tranchants T_y et/ou T_z sont non nuls.

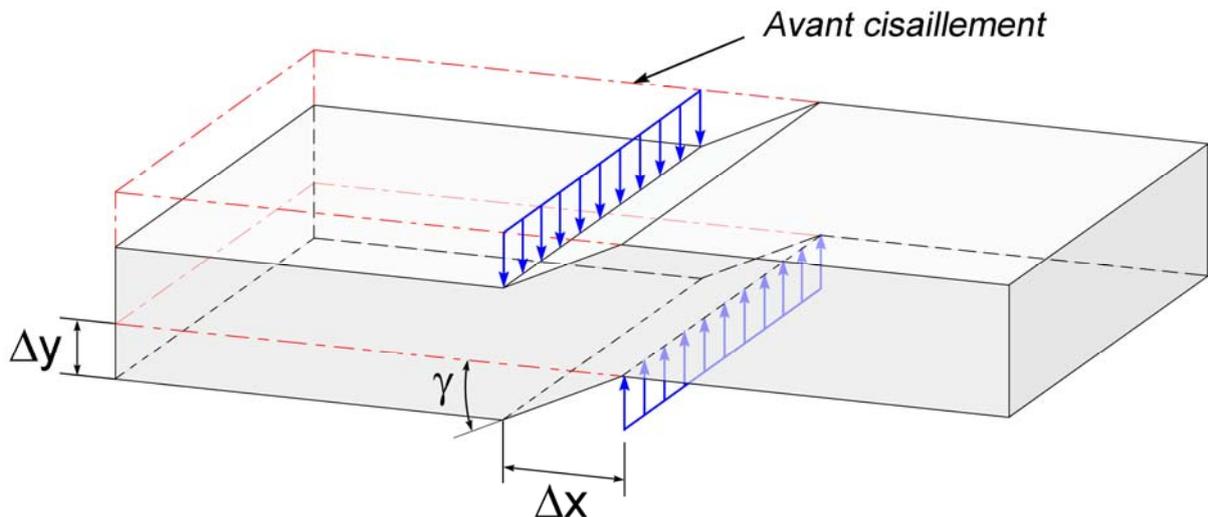
$$\{T_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{(G,R)}$$

Le cisaillement est un cas particulier, qui est assez éloignés des hypothèses de la Rdm : le cisaillement d'une pièce va à l'encontre du principe de Saint Venant, seules des sections particulières sont cisailées, là où les actions sont appliquées.



◆ Contrainte - Module d'élasticité transversal

La figure ci-dessous illustre le cisaillement d'une plaque, sous l'effet de deux actions décalées de la distance Δx . On observe alors une déformation de la zone cisailée, les autres parties restant parallèles. Les deux parties qui ne se déforment pas se décalent alors de l'amplitude Δy .



Dans la zone de déformation élastique, la contrainte dans la section cisailée est une contrainte tangentielle, proportionnelle à la déviation (glissement relatif) γ .

$$\tau = G \times \gamma = G \times \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{car } \gamma \text{ est petit, ainsi } \tan(\gamma) \approx \gamma)$$

G : module d'élasticité transversal, **module de Coulomb**.

L'étude de l'état des contraintes, permet de mettre en évidence une relation entre G , E et ν . Ainsi les mesures de E et ν par l'essai de traction permettent donc de déterminer G .

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Quelques valeurs

Matériau	Module de Coulomb (Mpa)
Aciers	80000
Fontes	40000
Alliages de cuivre	48000
Alliages d'aluminium	32000

◆ **Contrainte moyenne - Condition de résistance**

La condition de résistance s'écrit logiquement :

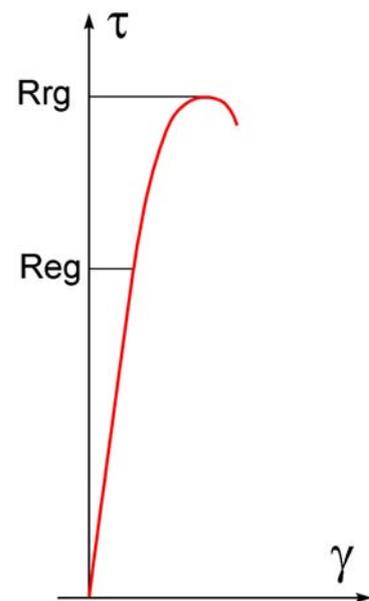
$$\tau_{\text{Max}} < \frac{R_{eg}}{s} = R_{pg}$$

Avec : $R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$

s : coefficient de sécurité (matériau, charge...);

R_{eg} : Résistance élastique au glissement (limite de la zone de déformation élastique).

La difficulté réside dans la détermination de la contrainte maximale. On applique alors simplement la relation avec la contrainte tangentielle moyenne : $\tau = \frac{T}{S}$



Ainsi on retiendra : $\tau_{\text{Moy}} = \frac{T}{S} < \frac{R_{eg}}{s} = R_{pg}$

Les valeurs de R_{eg} pour les différents matériaux, ne sont pas simples à obtenir. On utilise en général la valeur de R_e , et un coefficient qui dépend des matériaux :

Aciers doux, alliages d'aluminium	$R_{eg} \approx 0,5 R_e$
Aciers mi-durs	$R_{eg} \approx 0,7 R_e$
Aciers durs, très durs et fontes	$R_{eg} \approx 0,8 R_e$

3. Torsion des poutres circulaires

◆ Définition - torseur de cohésion

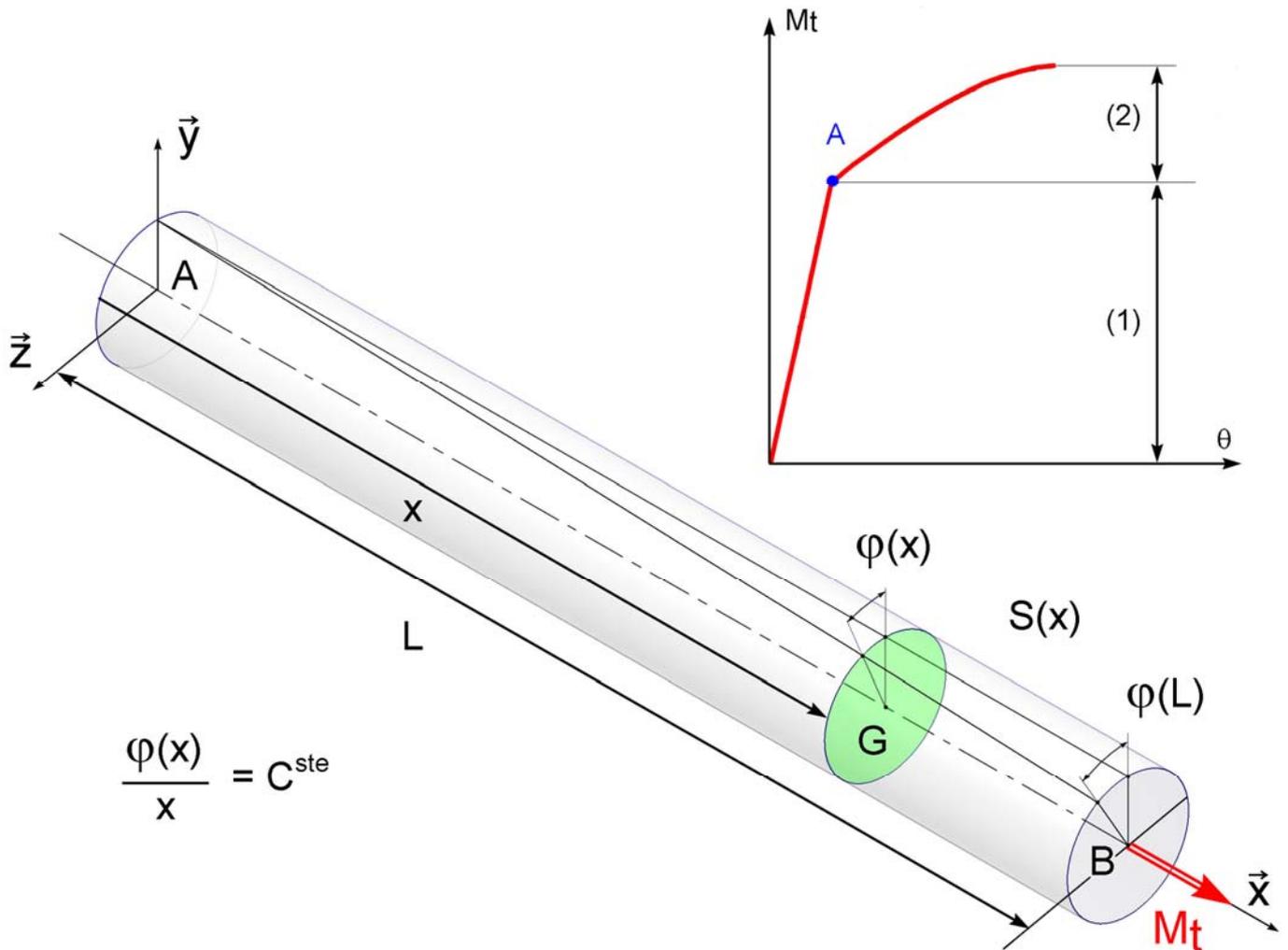
Une poutre subie une sollicitation de torsion si dans le torseur de cohésion, seul le moment fléchissant M_t est non nul.

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G,R)}$$



◆ Essai de torsion - Déformation angulaire unitaire

- Lors des essais de torsion sur une poutre cylindrique de section constante, on peut constater que dans la zone de déformation élastique, le décalage angulaire d'une section $S(x)$ est proportionnel à l'abscisse x .



$$\frac{\varphi(x)}{x} = C^{ste}$$

- Dans le cas général θ est l'angle unitaire de torsion s'écrit :

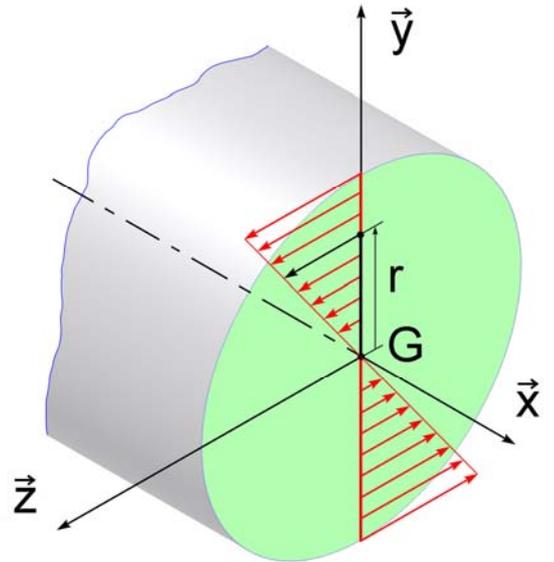
$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}$$

◆ Contrainte tangentielle - loi de Hooke

La contrainte en un point M de la section droite est une contrainte tangentielle. La loi de Hooke s'écrit : $\underline{\tau} = \mathbf{G} \times \gamma$ avec γ la distorsion $\gamma = r \times \theta$. La distorsion sur la surface cylindrique découle de la rotation d'angle $d\phi$ pour un tronçon de longueur élémentaire dx . Ainsi :

$$\tau = G r \theta$$

La contrainte est nulle au centre de la section, et maximale pour $r = R$, rayon de la poutre.



◆ Relation [Déformation - Moment de torsion]

- On isole la partie S1 (voir torseur de cohésion), et on écrit le théorème du moment statique en projection sur l'axe ξ (équilibre en rotation) :

$$\vec{M}_t + \iint_S \vec{GM} \wedge d\vec{f}(M) = 0$$

avec $d\vec{f}(M) = \tau dS$ et $\tau = G r \theta$

$$-M_t + \iint_S G \theta r^2 dS = 0 \Rightarrow M_t = G \theta \iint_S r^2 dS$$

- Le terme $I_G = \iint_S r^2 dS$ est le **moment quadratique polaire** de la section, au point G.

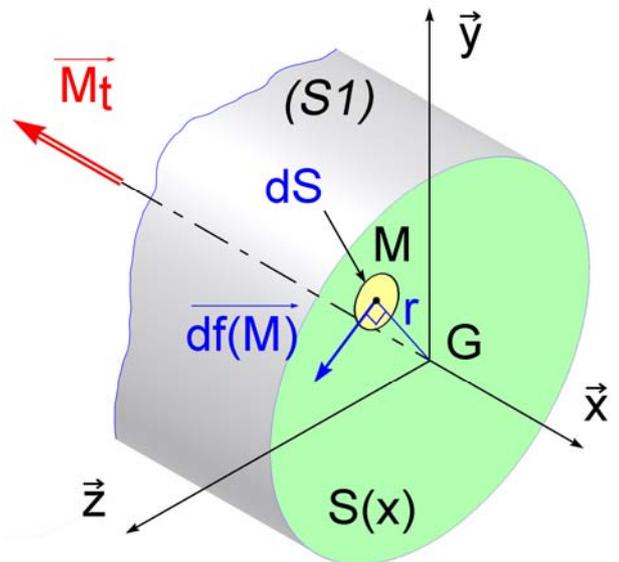
Exemple : section circulaire de diamètre $d = 2R$:

$$I_G = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \times r d\theta dr = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta = \frac{r^4}{4} \times 2\pi = \frac{\pi d^4}{32}$$

◆ Relation [Contrainte - Moment de torsion]

A partir des relations précédentes on trouve :

$$\boxed{M_t = G \theta I_G} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau(M) = \frac{M_t}{I_G} r}$$



La contrainte maximale a pour expression : $\tau_{\text{Max}} = \frac{M_t}{\left(\frac{I_G}{R}\right)}$, avec $\frac{I_G}{R}$ module de torsion.

◆ Déplacement d'une section

Le déplacement angulaire entre deux sections d'abscisses respectives x_1 et x_2 se trouve facile à partir de la déformation unitaire :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_t(x)}{GI_G} dx$$

Si M_t est constant, et si la poutre est encastree pour $x = 0$, alors le décalage angulaire en $x = L$ est :

$$\varphi(L) = \frac{M_t}{GI_G} L$$

◆ Condition de résistance

La contrainte étant tangentielle, on obtient la même condition de résistance :

$$\tau_{\text{Max}} < \frac{R_{eg}}{s} = R_{pg}$$

◆ Concentration de contrainte

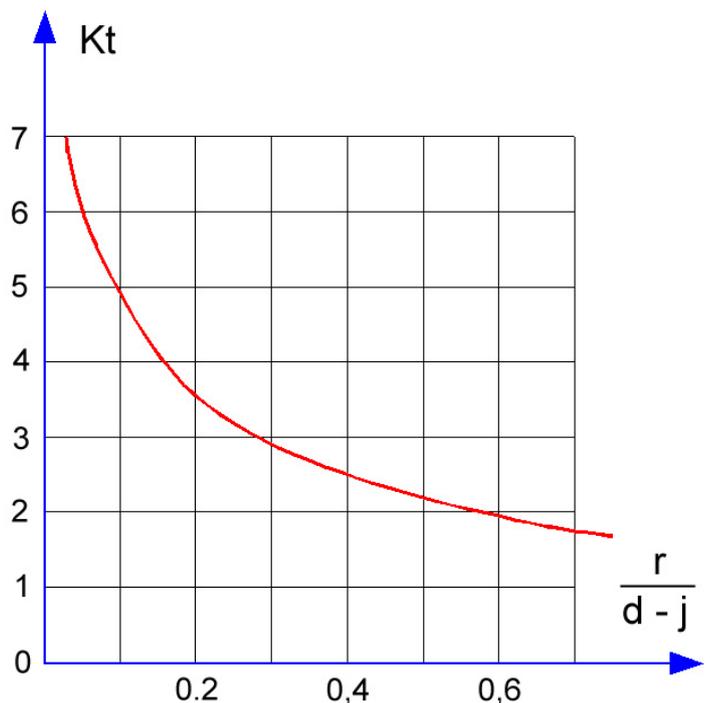
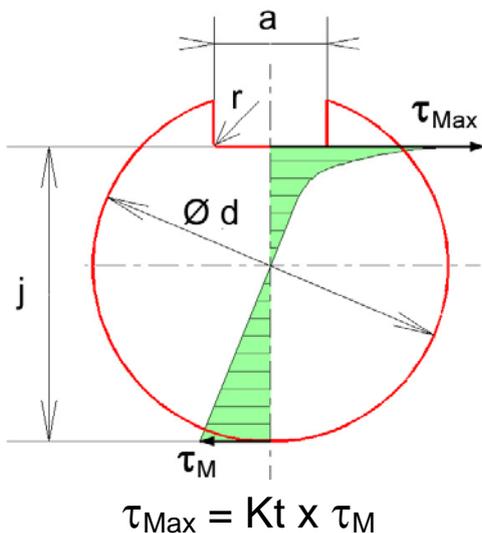
Là encore les accidents de forme sur une poutre occasionne des concentrations de contraintes.

$$\tau_{\text{Max réelle}} = K_t \times \tau_{\text{Max théorique}}$$

$\tau_{\text{Max théorique}}$ est la contrainte maximale déterminée avec les relations précédentes.

K_t : coefficient de concentration de contrainte.

Exemple : rainure de clavette



3. Flexion pure - Flexion simple

◆ Définition - torseur de cohésion

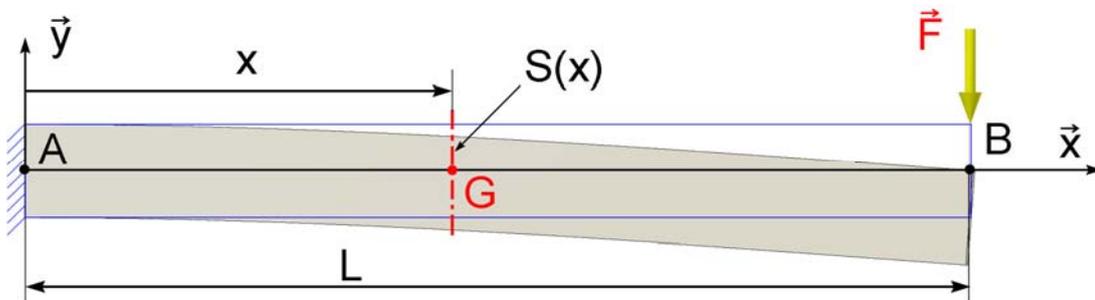
Une poutre subie une sollicitation de **flexion pure** si dans le torseur de cohésion, seul le moment de torsion M_{fy} ou M_{fz} est non nul. La flexion pure est assez rare.

$$\{T_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G,R)}$$

Il s'agit de flexion simple si dans le torseur de cohésion, seuls $[T_y \text{ \& } M_{fz}]$ ou $[T_z \text{ \& } M_{fy}]$ sont non nuls. Les illustrations qui suivent sont relatives au cas $[T_y \text{ \& } M_{fz}]$.

$$\{T_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(G,R)}$$

Exemple : poutre droite, encadrée à son extrémité A, soumise au chargement Φ en B. On observe sur l'allure de la déformée, que les "fibres supérieures" à la ligne moyenne sont étirées (tendues) et que les "fibres inférieures" sont comprimées. Cela se retrouvera dans l'expression de la contrainte normale dans une section droite.



Le torseur de cohésion s'écrit bien : $\{T_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y = -F & 0 \\ 0 & M_{fz} = -F(L-x) \end{Bmatrix}_{(G,R)}$

Remarque : il y a une relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant.

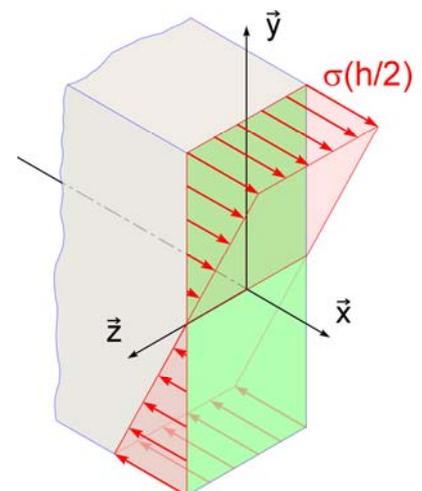
$$T_y = -\frac{d(M_{fz}(x))}{dx} \quad (T_z = +\frac{d(M_{fy}(x))}{dx} \text{ pour l'autre cas de chargement})$$

◆ Etat des contraintes normales dans une section droite

L'application de la loi de Hooke, et l'analyse de la relation entre contrainte normale et actions de cohésion (moment fléchissant) conduit aux relations suivantes :

$$\sigma(x) = -\frac{M_{fz}}{I(G, \vec{z})} y \quad \text{et} \quad \sigma(x) = +\frac{M_{fy}}{I(G, \vec{y})} z$$

$I(G, \zeta)$ est le moment quadratique de la section $S(x)$ par rapport à l'axe $G\zeta$.



◆ **Contraintes tangentielles :** présentes du fait de l'effort tranchant, elles sont moins importantes que les contraintes normales, et généralement négligées.

- Moment quadratique de la section $S(x)$ par rapport à l'axe $G\zeta$

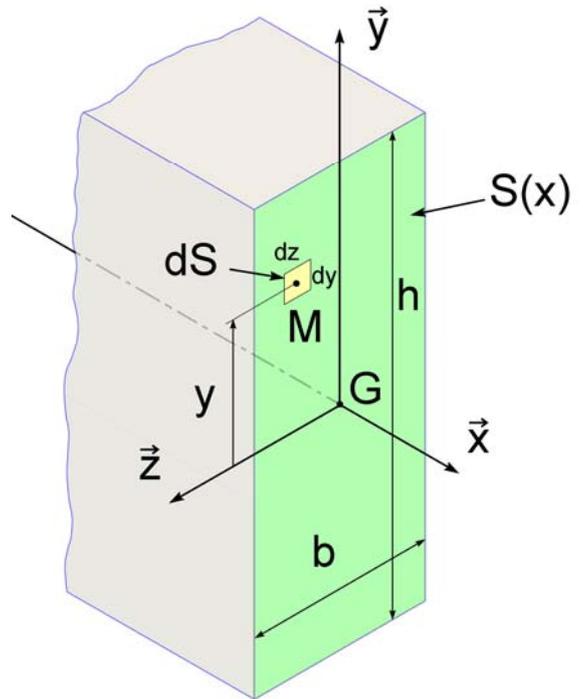
$$I(G, \vec{z}) = \iint_S y^2 dS$$

- Exemple d'une poutre à section rectangulaire :

$$I(G, \vec{z}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy dz$$

$$I(G, \vec{z}) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = b \left[\frac{h^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}$$

$$I(G, \vec{z}) = b \frac{h^3}{12}$$



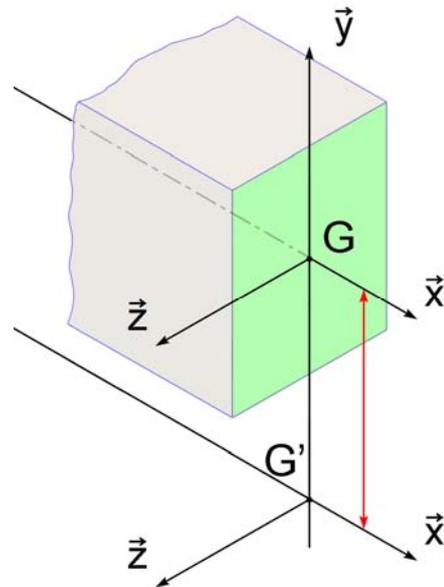
Remarque : on voit bien dans l'expression de ce terme, l'influence de la géométrie. Si la poutre est disposée avec b pour hauteur, son comportement en flexion sera bien différent.

- Théorème de Huygens⁴

Pour un certain nombre de profils, il est utile de pouvoir calculer le moment quadratique d'une section par rapport à un axe ne passant pas par le centre de gravité.

Le théorème de Huygens permet cela :

$$I(G', \zeta) = I(G, \zeta) + S d^2$$



◆ Déformation : équation de la courbe représentant la ligne neutre déformée

L'équation est donnée par la relation : $y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{Mfz}{EI(G, \vec{z})}$. Par deux intégrations successives, et en faisant intervenir les conditions aux limites, on peut déterminer $y(x)$.

◆ Condition de résistance : $\sigma_{Max} < \frac{Re}{s} = Rpe$

⁴ Huygens Christiaan : Mathématicien, physicien et astronome hollandais (1629-1695)